

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР
ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ЭНЕРГЕТИКИ
АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ЭНЕРГЕТИКИ

ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

198

(отдельный оттиск)

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА»

Применение составных методов численного интегрирования при моделировании динамических режимов работы БИС методом подсхем

С. Г. Русаков

Увеличение производительности САПР БИС — одна из важнейших научно-технических проблем. Предельные возможности систем автоматизации схемотехнического проектирования практически определяются значительными вычислительными затратами моделирования динамических режимов. Метод многополюсных подсхем является наиболее перспективным методом моделирования электрических характеристик БИС, учитывающим высокую размерность исследуемых моделей. С его помощью реализуется иерархический подход к построению математических моделей БИС и обеспечивается декомпозиционный способ численного решения формируемых систем уравнений [1—5]. Моделируемая схема представляется совокупностью взаимодействующих подсхем, а исходная задача высокой размерности сводится к последовательному решению задач низкой размерности, соответствующих каждой подсхеме.

Наиболее эффективно применять автономный вариант метода подсхем, обеспечивающий независимо для подсхем вычисления, организованные по иерархическому принципу [1, 2, 4, 6]. Перспективность такого подхода определяется потенциальной возможностью максимально адаптировать процесс вычислений к режимам работы или характеру протекающих процессов в отдельных подсхемах. Его применение к моделированию динамических режимов работы БИС непосредственно связано с решением известной проблемы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) высокой размерности с отдельным интегрированием «быстрых» и «медленных» переменных [7]. Алгоритмы такого класса должны обеспечивать сокращение затрат за счет выбора относительно большого шага интегрирования для медленных переменных при одновременном расчете отклика быстрых подсхем. Согласно работе [7], задача разработки методов интегрирования с разной скоростью по различным переменным относится к одной из наиболее сложных проблем численного решения ОДУ, и в настоящее время появляются первые методы и алгоритмы для ее решения.

При моделировании с использованием метода подсхем математическая модель БИС представляется в виде систем

$$\dot{f}(y, y, t) = 0; \quad (1)$$

$$g_i(z_i, z_i, y_i, y_i, t) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь z_i — внутренние переменные подсхем; y — полюсные или граничные переменные; y_i — компоненты вектора в i -й подсхеме; N — число подсхем. Система (1) описывает работу всей схемы (верхний уровень), а система (2) — работу отдельных подсхем (нижний уровень иерархической модели). Использование при моделировании того факта, что процессы в разных подсхемах на отдельных временных интервалах протекают с существенно различной скоростью, позволит значительно снизить трудоемкость численного интегрирования.

В работах [1, 2] описан способ интегрирования систем (1), (2) неявными методами, при котором выбор шага H системы (1) и шагов h_i для подсхем полностью определяется поведением соответствующих подсхем. Раздельное интегрирование уравнений различных подсхем снимает ограничение на величину шага, накладываемое быстроменяющимися переменными на все уравнения моделируемой БИС. Однако реализация такого подхода связана с алгоритмическими трудностями, которые без учета особенностей конструирования подобных алгоритмов могут привести к потере вычислительной эффективности. Примером является случай, когда отвергается шаг интегрирования по медленным переменным в соответствии со стратегией выбора шага по оценке погрешности. В работе [7] отмечается, что эта проблема «обратного хода» приводит к значительным алгоритмическим и программным затруднениям.

Покажем, что конструирование вычислительных процедур с удачным сочетанием разных методов интегрирования позволяет преодолеть указанные затруднения. Применение составных методов численного интегрирования (по аналогии с составными итерационными процессами [8]) при моделировании систем высокой размерности позволяет рассчитывать на дополнительные вычислительные преимущества.

Под составным методом интегрирования (или составным процессом интегрирования) здесь понимается иерархическая организация вычислений, при которой шаги вычислений одного метода (первичного) включают последовательность операций другого метода (вторичного). Например, на каждом шаге интегрирования первичного метода выполняются один или несколько шагов по правилам, заданным формулами вторичного метода. В частном случае один метод интегрирования может выступать в качестве как первичного, так и вторичного.

Выбор базовых методов численного интегрирования ОДУ для составных вычислительных процедур зависит от характера решаемых задач моделирования. В работе [9], например, приведена схема вычислений, использующая явные методы Рунге — Кутты для быстрых и медлен-

ных переменных. В программах машинного анализа ИС распространение получили неявные методы интегрирования благодаря возможности варьирования шага в широких пределах при большом разбросе собственных значений моделируемых систем. Для сохранения таких численных свойств естественно выбирать базовые методы с соответствующими характеристиками, например в классе А-устойчивых методов [10]. Применение неявных методов во внешнем цикле вычислений (на верхнем уровне иерархии) требует, кроме определения правой части, формирования якобиана J (для системы, заданной в виде (1) матрица $J = [\partial f / \partial y \cdot \frac{1}{H} + \partial f / \partial y]$, где H —

шаг интегрирования), что создает дополнительные алгоритмические трудности. В работах [1, 2] описан способ вычисления якобиана системы (1) по результатам интегрирования систем (2) для подсхем при использовании неявного метода Эйлера на обоих уровнях. Рассмотрим процедуру, состоящую из неявного метода Эйлера для моделирования подсхем (вторичный метод) и метода Розенброка для уравнений связи подсхем (1) (первичный метод), и алгоритм интегрирования с разной скоростью.

Как указывалось, случаи частого отказа установленных шагов по медленным переменным в связи с превышением допустимой погрешности интегрирования приводят к дополнительным затратам времени или памяти. Эта ситуация возникает потому, что завершающими операциями на шаге интегрирования системы верхнего уровня (1) является оценка погрешности и установление новых значений переменных по результатам проведенной коррекции, а необходимые для вычисления корректирующей поправки матрицы определяются интегрированием систем (2).

Для устранения указанных алгоритмических недостатков предлагается для системы уровня (1) применять полужавные методы типа Розенброка [10—12]. Методы Розенброка первого и второго порядков являются А-устойчивыми [11, 12]. Особенностью сочетаний этих методов с неявными методами, например методами Гира [7, 10], на нижнем уровне является иной порядок вычислений: сначала определяются не прогнозируемые, а окончательные значения переменных системы (1) на шаге интегрирования, а затем решаются системы (2) с формированием необходимых матриц для следующего шага интегрирования системы (1).

Рассмотрим последовательность операций составного метода интегрирования, включающего в качестве первичного метод Розенброка, а в качестве вторичного неявный метод Эйлера для случая одинаковых шагов по всем переменным систем (1) и (2) $h_i = H$, $i = 1, \dots, n$. Вычислительная схема метода Розенброка первого порядка точности для системы вида (1) опреде-

ляется следующими формулами [11]:

$$y_{n+1} = y_n + k_1^y; \quad \dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + k_1^{\dot{y}}; \\ k_1^{\dot{y}} = J_n^{-1} \left[f|_{t=t_n} + F_y H \cdot \dot{y}_n + \frac{\partial f}{\partial v_{\text{вх}}} H \dot{v}_{\text{вх}} \right]; \\ k_1^y = H (k_1^{\dot{y}} + \dot{y}_n); \quad (3)$$

$$J_n = F_{\dot{y}}|_{t=t_n} + F_y|_{t=t_n} \cdot H; \quad F_{\dot{y}} = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}};$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y};$$

где $v_{\text{вх}}$ — вектор входных (внешних для схемы) воздействий. Приведем алгоритм формирования и решения системы верхнего уровня (1) методом Розенброка при одновременном интегрировании неявным методом Эйлера систем уравнений (2) для подсхем.

1. Выполнение шага по переменным y в соответствии с формулами (3):

$$y_{n+1} = y_n + k_1^y;$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + k_1^{\dot{y}}.$$

2. Для каждой i -й подсхемы выполняются следующие операции [1] (индекс i ниже для упрощения записи опущен):

2.1. Прогноз:

$$\tilde{z}_{n+1} = \dot{z}_n;$$

$$\tilde{z}_{n+1} = z_n + H \dot{z}_n; \quad (4)$$

или

$$\tilde{z}_{n+1} = z_n + H \dot{z}_n + H \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y}_{n+1}.$$

2.2. Вычисление правой системы (2) $g(\tilde{z}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1})$ и якобиана $[G_z \cdot 1/H + G_z]$, где $G_z = \partial g / \partial z$, $G_z = \partial g / \partial z$.

2.3. Коррекция по внутренним переменным z , включающая итерационный ньютоновский процесс:

$$\left[G_z \cdot \frac{1}{H} + G_z \right] \Delta z^m = -g(\tilde{z}_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}),$$

$$\tilde{z}_{n+1}^{m+1} = \tilde{z}_{n+1}^m + \Delta z^m \quad (5)$$

(где m — номер итерации) с окончательным определением полюсных переменных I .

2.4. Вычисления коэффициентов влияния $\partial z / \partial y$ и $\partial z / \partial u$:

$$\left[G_z \cdot \frac{1}{H} + G_z \right] \partial z / \partial y = -G_y; \quad (6)$$

$$\left[G_z \cdot \frac{1}{H} + G_z \right] \partial z / \partial \dot{y} = -G_{\dot{y}}$$

и матриц полюсных производных:

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial \dot{z}} \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial y}; \quad (7)$$

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial I}{\partial \dot{z}} \cdot \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial z}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial I}{\partial \dot{y}}.$$

2.5. Вычисление новых текущих значений переменных z_{n+1} и \dot{z}_{n+1} . Оценка локальной погрешности и величины нового шага h_i .

2.6. Формирование матриц для формул интегрирования (3) для системы (1) верхнего уровня, в том числе вектора f_{n+1} и якобиана J_i соответствующим суммированием значений полюсных переменных I_{n+1} и их производных (7).

2.7. Выполнение шагов 2.1—2.6 для всех подсхем с результирующим формированием вектора I_{n+1} и якобиана J_{n+1} .

3. Выполнение контроля погрешности интегрирования системы (1) и выбор нового шага $H = \min(H_{n+1}, h_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

4. Повторение шагов 1—3. Цикл интегрирования на верхнем уровне замкнут.

Рассмотрим модификацию приведенной схемы вычислений, обеспечивающую автономное интегрирование уравнений i -й подсхемы в рамках интегрирования системы уравнений верхнего уровня (1). Отличия заключаются в том, что вычисления для отдельных подсхем проводятся на отрезке интегрирования $[t_n, t_n + H_n]$, где H_n — шаг интегрирования системы (1) методом Розенброка, с автономным выбором шага h_i в соответствии с характером процессов в каждой подсхеме. Последовательность операций интегрирования систем (2) и формирования системы (1) приведена в работах [1, 2] и включает для каждой подсхемы одновременное интегрирование систем

$$g(\dot{z}, z, \dot{y}_{n+1}, y, t) = 0 \quad (8)$$

и уравнений в вариациях

$$G_z \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial \dot{y}_{n+1}} + \frac{\partial z}{\partial y} s \right) + G_z \left(\frac{\partial z}{\partial \dot{y}_{n+1}} + \frac{\partial z}{\partial y} s \right) + (G_y + G_y s) = 0, \quad (9)$$

где $s = t - t_n$, $s \in [t_n, t_n + H_n]$, для формирования якобиана J_{n+1} . Совместное решение систем (8) и (9) не требует существенных дополнительных временных затрат, так как сводится к решению систем уравнений с одинаковой матрицей коэффициентов [1, 2]. После формирования вектора f_{n+1} матриц $F_y, F_{\dot{y}}$ и якобиана J_{n+1} в точке $(t_n + H_n)$ в соответствии с приведенным ранее алгоритмом

проводится вычисление величин k_1^y и $k_1^{\dot{y}}$ с учетом H_{n+1} ; оценка локальной или глобальной погрешности интегрирования; определение значения y_{n+2} и \dot{y}_{n+2} ; решение вопроса о принятии или отказе шага H_{n+1} ; выбор величины шага H_{n+2} в соответствии с применяемой стратегией.

Существенным моментом, отличающим приведенный вариант автономного интегрирования подсхем от описанного в работах [1, 2], является то, что в качестве параметров y_{n+1} систем (2) выступают не прогнозируемые, а окончательные значения полюсных переменных, и вопрос о принятии шага H_{n+1} решается до начала интегрирования уравнений подсхем. Таким образом, исключается необходимость дополнительной вычислительной трудоемкости обработки подсхем в случае отказа шага интегрирования H_{n+1} системы верхнего уровня.

Использование в качестве априорной информации при интегрировании уравнений подсхем значений полюсных переменных позволяет получить дополнительные вычислительные преимущества. Например, достаточно просто реализуется принцип «латентности» [1, 3, 4]. При моделировании на уровне электрических сигналов учет латентности заключается в выявлении динамически неактивных блоков и исключении обработки соответствующих матриц. Учет так называемой временной разреженности и исключение операций внутри неактивных подсхем позволяет значительно снизить временные затраты.

Основная практическая задача при этом состоит в установлении критериев латентности [4], определяющих пассивность как входных, так и внутренних переменных подсхем.

В рассматриваемом автономном варианте метода подсхем с применением метода Розенброка на верхнем уровне этот вопрос решается в результате анализа вектора приращений k_1^y . Если все соответствующие i -й подсхеме компоненты этого вектора не превышают заданный уровень ошибки, т. е.

$$\|k_1, i^y\| < \delta, \quad (10)$$

внутренние переменные подсхемы остаются неизменными,

$$H \|\dot{z}_n\| < \delta, \quad (11)$$

и на интервале $[t_n, t_n+H]$ отсутствуют независимые генераторы сигналов, подсхема считается на этом интервале неактивной. Таким образом, если в модели подсхемы (2) в процессе интегрирования полюсные переменные \dot{y} и y не изменили своих значений и внутренние переменные достигли установившихся значений, величина шага может превосходить величину шага системы верхнего уровня ($h_i \gg H$), причем синхронизация процесса интегрирования, обеспечиваемая способом выбора шага H , не нарушается.

В приведенном варианте вычислительная схема составного метода интегрирования включает одношаговые методы первого порядка точности. При такой реализации независимых для подсхем вычислений при интегрировании можно применить другие методы или модификации, например в качестве вторичных использовать многошаговые методы интегрирования уравнений подсхем вместо неявного метода Эйлера. Проанализируем возможность применения методов более высокого порядка точности на верхнем уровне составного метода. Использование для этих целей формулы Розенброка второго порядка точности

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \nu k_1^y + (1-\nu) k_2^y; \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \nu k_1^{\dot{y}} + (1-\nu) k_2^{\dot{y}}, \end{aligned} \quad (12)$$

аналогичной формуле (3), сводится к последовательности операций на шаге интегрирования систем (1) [11, 12], которую можно разделить на две стадии (при $\nu=1$ формула (12) автоматически переходит в формулу (3) первого порядка).

Первая стадия:

$$\begin{aligned} J &= [F_y(\dot{y}_n, y_n, t_n) + \nu H F_y(\dot{y}_n, y_n, t_n)]; \\ \nu k_1^{\dot{y}} &= -J^{-1} [f(\dot{y}_n, y_n, t_n) + F_y \cdot \nu H \dot{y}_n]; \\ k_1^y &= \nu H k_1^{\dot{y}} + H \dot{y}_n; \\ y_{n+1/2} &= y_n + \nu k_1^y. \end{aligned} \quad (13)$$

Вторая стадия:

$$\begin{aligned} f|_{t_n+\nu H} &= f(\dot{y}_{n+1/2}, y_{n+1/2}, t_{n+\nu H}); \\ \nu k_2^{\dot{y}} &= -J^{-1} [f|_{t_n+\nu H} + F_y H \dot{y}_{n+1/2}]; \\ k_2^y &= \nu k_2^{\dot{y}} H + \dot{y}_{n+1/2} H; \\ y_{n+1} &= y_{n+1/2} + (1-\nu) k_2^y; \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_{n+1/2} + (1-\nu) k_2^{\dot{y}}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае параметру ν может быть присвоено значение $1-1/\sqrt{2}$ [11, 12]. Формулы (12) аппроксимируют систему (1) с порядком точности $O(h^3)$ и позволяют интегрировать в среднем с большим шагом, чем для метода первого порядка. Формулы используют, как и в (3), один раз вычисленный якобиан J и одно LU -разложение. Формирование матриц F_y и $F_{\dot{y}}$ для якобиана не отличается от описанного ранее подхода. Дополнительным является лишь формирование вектора невязки f в промежуточной точке $(t_n+\nu H)$. Поэтому интегрирование уравнений подсхем (8) должно быть проведено после первой стадии формул (12) на отрезке $(t_n, t_n+\nu H)$, а после второй стадии на отрезке $(t_n+\nu H, t_n+H)$.

Другим вариантом является выполнение всех операций в соответствии с методом Розенброка первого порядка на отрезке (t_n, t_n+H) с запоминанием значений y, \dot{y}, f в точке $(t_n+\nu H)$. Далее выполняются операции интегрирования системы (1) методом второго порядка по формулам (13).

Таким образом, интегрирование системы (1) из точки t_n в точку t_{n+1} осуществляется с помощью методов как первого, так и второго порядков. Это может быть полезно для оценки глобальной погрешности по методике, разработанной в работе [11], позволяющей глобальную ошибку аппроксимации одношаговых методов определять с помощью методов более низкого порядка. Следовательно, в этом случае стратегия автоматического выбора шага может использовать оценку глобальной погрешности.

Таким образом, составные численные процедуры интегрирования могут быть успешно использованы для иерархической организации вычислительного процесса при моделировании динамических режимов работы БИС методом подсхем. Предложенная для разностороннего интегрирования вычислительная схема с включением полуявных методов типа Розенброка обеспечивает синхронизацию процесса и позволяет решить алгоритмическую проблему обратного хода. Среди вычислительных преимуществ, определяющих перспективность предложенного алгоритма моделирования, следует указать простоту реализации принципа латентности и простоту распараллеливания процесса интегрирования благодаря организации независимых для подсхем вычислений.

1. Баталов Б. В., Егоров Ю. Б., Русаков С. Г. Основы математического моделирования БИС на ЭВМ.— М.: Радио и связь, 1982.— 168 с.
2. Гурарий М. М., Русаков С. Г. Машинный расчет сложных электронных схем методом подсхем.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1977.— № 1.— С. 193—197.
3. Хэттел Г. Д., Санджованни-Винчензелли А. Л. Обзор методов моделирования третьего поколения // Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике.— 1981.— 69, № 10.— С. 100—119.

4. *Rabbat N. G., Sangiovanni-Vincentelli A. L., Hsieh H. Y.* A multilevel Newton algorithms with macromodelling and latency for the analysis of largescale nonlinear circuits in the time domain // *IEEE Trans. on Circuits and Systems.*— 1979.—26.— P. 733—741.
5. *Бондаренко В. М., Пфенинг В. В.* Использование метода подсхем для анализа нелинейного режима электронных схем: Автоматизация проектирования РЭА.— М.: Москов. дом научно-техн. пропаганды. 1973.— С. 49—52.
6. *Елизаренко Г. Н., Сличенко В. Г.* Иерархические способы организации итераций в сложных нелинейных цепях // *Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника.*— 1977.— 20, № 6, с. 107—141.
7. *Gear C. W.* Numerical solution of ODE, is there anything left to do? // *SIAM, Review.*— 1981.—23, N 1.— P. 10—24.
8. *Ортега Дж., Рейболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир, 1975.— 558 с.
9. *Andrus I. F.* Numerical solutions of systems ordinary differential equations separated into subsystems // *SIAM I. Numerical Analysis.*— 1979.—16, N 4.— P. 605—611.
10. *Современные численные методы решения ОДУ* / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта.— М.: Мир, 1979.— 312 с.
11. *Новиков Б. А., Демидов Г. В.* Экономичный алгоритм интегрирования жестких систем ОДУ. Численные методы математической физики.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР.— 1979.— С. 69—83.
12. *Артемьев С. С., Демидов Г. В., Новиков Е. А.* Минимизация овражных функций численным методом для решения жестких систем уравнений.— Новосибирск, 1960.— 13 с. (Препринт АН СССР ВЦ СО; № 74).

Поступила 05.10.84